Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
CLASA a V-a

Subiectul 1.

a) Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care ale loc egalitatea
$$2017 - [45:(38 - 70:2)] \cdot a = 7.$$

b) Demonstrați că
$$(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}):(2^8 + 2^7 + 2^6) = 2^4.$$

c) Determinați ultimele patru cifre ale numărului
$$A = 2^{2017} - 2^{2011} - 2^{2010}.$$

Subiectul 2.

a) Calculați suma câturilor obținute prin împărțirea la 2017 a tuturor numerelor de la 1 la 4040.
b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma tuturor câturilor obținute prin împărțirea numerelor de la 1 la $4 \cdot n$ la n este 2020.

Subiectul 3.

Comparați numerele
$$A = [(\overline{xx})^2 + x \cdot \overline{x0x}] \cdot [(\overline{yy})^2 + y \cdot \overline{y0y}]$$
și
$$B = 4 \cdot \overline{y00y} \cdot \overline{x00x},$$
unde $\overline{xx}$, $\overline{x0x}$, $\overline{x00x}$, $\overline{yy}$, $\overline{y0y}$ și $\overline{y00y}$ sunt numere scrise în baza 10.

Notă:

1) Timp de lucru 2 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017
BAREM DE CORECTARE CLASA A V-A

Subiectul 1.

a) Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care ale loc egalitatea

$$2017 - [45:(38 - 70:2)] \cdot a = 7.$$

b) Demonstrați că

$$(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}):(2^8 + 2^7 + 2^6) = 2^4.$$

c) Determinați ultimele patru cifre ale numărului

$$A = 2^{2017} - 2^{2011} - 2^{2010}.$$

Soluție:

a) $a = 134$ **(2p)**

b) $(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}):(2^8 + 2^7 + 2^6) = (2^{10} \cdot 7):(2^6 \cdot 7) = 2^{10}:2^6 = 2^4$ **(2p)**

c) $A = 2^{2010}(2^7 - 2 - 1) = 2^{2010} \cdot 125 = 2^{2007} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2007} \cdot 1000$ **(2p)**

Cum ultima cifră a numărului 2^{2007} este 8, se obține că ultimele 4 cifre al numărului A sunt 8 0 0 0. **(1p)**

Subiectul 2.

a) Calculați suma câturilor obținute prin împărțirea la 2017 a tuturor numerelor de la 1 la 4040.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma tuturor câturilor obținute prin împărțirea numerelor de la 1 la $4 \cdot n$ la n este 2020.

Soluție:

a) Prin împărțirea la 2017 pentru numerele de la 1 la 2016 se obține câtul 0, pentru numerele de la 2017 la 4033 se obține câtul 1, iar pentru numerele de la 4034 la 4040 se obține câtul 2. **(2p)**

Suma căutată este

$$S = 0 \cdot 2016 + 1 \cdot 2017 + 2 \cdot 7 = 2031.$$ **(1p)**

b) Prin împărțirea la n

pentru numerele de la 1 la $n - 1$ se obține câtul 0, **(0.5p)**

pentru numerele de la n la $2n - 1$ se obține câtul 1, **(0.5p)**

pentru numerele de la $2n$ la $3n - 1$ se obține câtul 2, **(0.5p)**

pentru numerele de la $3n$ la $4n - 1$ se obține câtul 3 **(0.5p)**

iar pentru $4n$ se obține câtul 4. **(0.5p)**

Suma acestor câturi este

$2020 = 0 \cdot (n - 1) + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + 4.$ **(0.5p)**

Se obține $n = 336$. **(1p)**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro
COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU

Subiectul 3 .

Comparați numerele

$$A = [(\overline{xx})^2 + x \cdot \overline{x0x}] \cdot [(\overline{yy})^2 + y \cdot \overline{y0y}]$$

și

$$B = 4 \cdot \overline{y00y} \cdot \overline{x00x},$$

unde $\overline{xx}$, $\overline{x0x}$, $\overline{x00x}$, $\overline{yy}$, $\overline{y0y}$ și $\overline{y00y}$ sunt numere scrise în baza 10.

Soluție:

Cum $\overline{xx} = x \cdot 11$, $\overline{x0x} = x \cdot 101$, $\overline{x00x} = x \cdot 1001$ **(1p)**

avem

$A = x^2(11^2 + 101) \cdot y^2(11^2 + 101) = (xy)^2 \cdot 222^2 < xy \cdot 81 \cdot 49284 = xy \cdot 3992004$ **(4p)**

și

$B = 4 \cdot xy \cdot 1001^2 = xy \cdot 4008004$ **(1p)**

Deoarece $3992004 < 4008004$, rezultă că pentru orice alegere a cifrelor x și y avem **(1p)**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro